数理解析研究所講究録
638巻 1988年 101-114

Theorem of Cauchy-Kowalewsky and microdifferential operators

近畿大・理工 青木貴史 (Takashi AOKI)
新潟大・教養 田島慎一 (Shinichi TAJIMA)

We study the structure of the singularities of the multi-valued (inhomogeneous) solutions of linear partial differential equations in a complex domain. In section 1, we present an explicit formula for the holomorphic solution of the Cauchy problem by using the microdifferential operators. In section 2, we proove the following theorems in an elementary way by making use of the formula presented in section 1.

Th. Let Y be a complex hypersurface in $X = C^n$, P be a linear partial differential operator. If Y is non-characteristic with respect to P, then we have

$$\mathrm{Ker}(P: \mathcal{C}^{\mathbf{R}}_{Y|X} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathbf{R}}_{Y|X}) = \mathrm{Coker}(P; \mathcal{C}^{\mathbf{R}}_{Y|X} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathbf{R}}_{Y|X}) = 0.$$

Th. If $\sigma_m(P)(z, \xi dz) \not\equiv 0$ on $T^*_Y X$, then we have

$$\mathrm{Ker}(P; \mathcal{C}^{\mathbf{R}}_{Y|X} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathbf{R}}_{Y|X}) = 0.$$

In section 3, we study the singularities of the inhomogeneous multi-valued solutions for some typical cases e.g., the Leray-Mizohata equation, and the Lewy equation.

§.1 Cauchy問題と擬微分作用素

この節ではCauchy問題の正則解の具体的表示及びその収束域に対する評価をRiemann-Liouville積分を使って与える。以下にみられるように、議論は初等的であり、誰もが考えつきそうだという意味で自然と思われるが、我々の知る限り、この様な解の構成法は知られていない。この節の結果は次の節で利用される。

P を $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍で定義された正則函数を係数とする m 階の線型偏微分作用素で次の形をしたものとする。

$$P = P(z, D) = D_1^m - P_1(z, D')D_1^{m-1} - \cdots - P_m(z, D')$$

但し $D = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right)$, $D' = \left(\frac{\partial}{\partial z_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right)$ で $P_j(z, D')$ は D_1 を含まない高々 $m-j$ 階の偏微分作用素とする。

今 $P' = P_1(z, D')D_1^{m-1} + \cdots\cdots + P_m(z, D')$ と置き

$$P = D_1^m - P' = (1 - P'(z, D)D_1^{-m})D_1^m$$

と考えれば P^{-1} は形式的には Neumann 級数により

$$P^{-1} = D_1^{-m} \sum_{j=0}^{\infty} (P' D_1^{-m})^j$$

で与えられる。正則函数 φ に P^{-1} が作用することを確かめよう。まず D_1^{-j} の正則函数への作用を Riemann-Liouville 積分

$$D_1^{-j}\varphi(z) = \frac{1}{(j-1)!}\int_0^{z_1}(z_1-t)^{j-1}\varphi(t, z')\,dt$$

$$= \frac{z_1^{\,j}}{(j-1)!}\int_0^{1}(1-s)^{j-1}\varphi(sz_1, z')\,ds$$

で定める。

$$\begin{cases} D_1^{\,j} D_1^{-k}\varphi(z) = D_1^{\,j-k}\varphi(z) \\ D_1^{-j} D_1^{\,j}\varphi(z) = \varphi(z) - \displaystyle\sum_{k=0}^{j-1}\frac{z_1^{\,k}}{k!}\frac{\partial^k\varphi}{\partial z_1^{\,k}}(0, z') \end{cases}$$

$$j, k = 0, 1, 2, \cdots$$

が成りたつ。

$$P_\nu(z, D') = \sum_{|\beta|=\nu} p_\nu^{(\beta)}(z)\, D'^{\beta} \qquad \text{但し } \beta = (\beta_2, \cdots, \beta_m)$$

と置き $p_\nu^{(\beta)}$ は $U_r = \{z \mid |z_1| < r, \cdots |z_m| < r\}$ で正則とする。任意の正数 $r_1 < r$ に対して

$$B = \sup_{\nu, \beta}\ \sup_{|z_\mu| < r_1,\ \mu=1,2,\cdots,n} |p_\nu^{(\beta)}(z)|$$

と決めれば Cauchy の評価式を用いて次の補題を示せる。

補題　φ が U_r で正則とする。任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\left| P_{\nu_j}(z,D')D_1^{-\nu_j}\cdots\cdots P_{\nu_1}(z,D')D_1^{-\nu_1}\varphi(z)\right|$$

$$\le (2^{n-2}B)^j\cdot(2e\varepsilon^{-1}|z_1|)^{\nu_1+\cdots+\nu_j}\cdot\sup_{0\le t\le 1,\ |y_\mu|\le r_1,\ \mu=2,\cdots,n}|\varphi(tz_1,y')|$$

が　$K_\varepsilon=\{z\mid |z_1|\le r_1,\ |z_\mu|\le r_1-\varepsilon\quad(\mu=2,3,\cdots,n)\}$ において成りたつ。但し $j=0,1,2,\cdots$ ，$\nu_1,\nu_2,\cdots\nu_j$ は $1\le\nu_i\le m$ $(1\le\nu_i\le m)$ をみたすとする∎

この補題を使えば K_ε において

$$\left|(P'D_1^{-m})^j\varphi(z)\right|$$

$$\le\sum_{1\le\nu_1,\cdots,\nu_j\le m}\left|P_{\nu_j}(z,D')D_1^{-\nu_j}\cdots P_{\nu_1}(z,D')D_1^{-\nu_1}\varphi(z)\right|$$

$$\le\sum_{1\le\nu_1,\cdots,\nu_j\le m}(2^{n-2}B)^j(2e\varepsilon^{-1}|z_1|)^{\nu_1+\cdots+\nu_j}\sup|\varphi(tz_1,y')|$$

$$\le(2^{n+1}Be\varepsilon^{-1}|z_1|)^j\sum_{l=0}^{(m-1)j}(4e\varepsilon^{-1}|z_1|)^l\sup|\varphi(tz_1,y')|$$

を得る。従って　$2^{n+1}Be\varepsilon^{-1}|z_1|<1$　ならば

$$P^{-1}\varphi(z)=D_1^{-m}\sum(P'D_1^{-m})^j\varphi(z)$$

は収束し、正則函数を定める。$P(P^{-1}\varphi(z))=\varphi(z)$ がなりたつので次の結果を得る。

定理　$P^{-1}\varphi$ は $\{z \mid (2^{m+1}Be)|z_1|+|z_\mu|<r_1 \ (\mu=2,\cdots,n)\}$ において正則で $P(P^{-1}\varphi(z))=\varphi(z)$ をみたす。

次に正則函数 ψ に対して $P^{-1}(P\psi)$ の計算をして，Cauchy 問題に応用する。

$$P^{-1}(P\psi) = D_1^{-m}\sum_{j=0}^{\infty}(P'D_1^{-m})^j(D_1^m-P')\psi$$

$$= D_1^{-m}\sum(P'D_1^{-m})^j D_1^m\psi - D_1^{-m}\sum(P'D_1^{-m})^j P'\psi$$

$$= \sum(D_1^{-m}P')^j D_1^{-m}D_1^m\psi - \sum(D_1^{-m}P')^{j+1}\psi$$

ここで

$$D_1^{-m}D_1^m\psi(z) = \psi(z) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{z_1^k}{k!}\frac{\partial^k\psi}{\partial z_1^k}(0,z')$$

を利用する。右辺の第2項を

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{z_1^k}{k!}\frac{\partial^k\psi}{\partial z_1^k}(0,z') \qquad \text{とおく。}$$

すると

$$P^{-1}(P\psi) = \sum(D_1^{-m}P')^j(\psi-\Phi) - \sum(D_1^{-m}P')^{j+1}\psi$$

$$= \psi - \sum(D_1^{-m}P')^j\Phi$$

を得る。　移項して

$$\psi = P^{-1}(P\psi) + \sum (D_1^{-m} P')^j \Psi$$

を得る。

ここで $\Psi(z)$ は初期データ $\psi(0,z'), \cdots, \frac{\partial^{m-1}\psi}{\partial z_1^{m-1}}(0,z')$ のみで決まることに注意すれば次の形で Cauchy-Kowalewsky の定理が得られる。

<u>定理</u> f 及び $u_0, u_1, \cdots, u_{m-1}$ はそれぞれ U_r, $U_r \cap \{z_1=0\}$ において正則とする。このとき

$$Pu = f \quad \text{かつ} \quad \left.\frac{\partial^k u}{\partial z_1^k}\right|_{z_1=0} = u_k \qquad k=0,1,\cdots,m-1$$

なる Cauchy 問題の解 u は

$$u = P^{-1}f + \sum (D_1^{-m} P')^j \Psi$$

で与えられる。但し $\Psi(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z_1^k}{k!} u_k(z')$ とおいた。

更に

$0 < r_1 < r$ に対し $B = \max\left\{ \sup_{\nu,\beta} \sup_{|z_\mu|<r_1,\ \mu=2,\cdots,n} |p_\nu^{(\beta)}(z)|,\ 1 \right\}$ とおくとき

u は $\{ z \mid (2^{n+1}Be)|z_1| + |z_\mu| < r_1 \quad (\mu=2,\cdots,n) \}$ において正則である。

注。u が初期条件をみたすことは容易に確かめられる。

§.2 $C_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ 解の構造

$X=\mathbb{C}^n$ の hypersurface Y を $Y=\{z \mid z_1=0\}$ で与える。Real holomorphic microfunctions のなす層 $C_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ の $p^*=(0;\xi dz_1)\in \dot{T}_Y^*X$ における germ は次の形で与えられる。

$$C_{Y|X,p^*}^{\mathbb{R}} = \varinjlim_{\delta, r} \mathcal{O}(U_r \setminus Z_\delta)/\mathcal{O}(U_r)$$

但し $U_r=\{z \mid |z_1|<r,\dots,|z_n|<r\}$, $Z_\delta=\{z \mid \mathrm{Re}\,\xi z_1 \geq \delta|z_1|\}$。

さて $f\in C_{Y|X,p^*}^{\mathbb{R}}$ に対して f の定義関数 $\varphi\in\mathcal{O}(U_r\setminus Z_\delta)$ をとり，$\mathrm{Re}\,\xi a<\delta|a|$, $|a|<r$ をみたす $a\in\mathbb{C}$ を固定して

$$D_1^{-j}\varphi(z)=\frac{1}{(j-1)!}\int_a^{z_1}(z_1-t)^{j-1}\varphi(t,z')\,dt$$

で作用を決めれば $D_1^{-j}f$ が定義できる。このとき

$$\begin{cases} D_1^{j}D_1^{-k}\varphi(z)=D_1^{j-k}\varphi(z) \\ D_1^{-j}D_1^{j}\varphi(z)=\varphi(z)-\displaystyle\sum_{k=0}^{j-1}\frac{(z_1-a)^k}{k!}\frac{\partial^k\varphi}{\partial z_1^k}(a,z') \end{cases}$$

が成りたつのは前と同様である。

まず，Y が P に対して非特性的な場合に

$\mathrm{Ker}(P;C_{Y|X}^{\mathbb{R}}\longrightarrow C_{Y|X}^{\mathbb{R}})$ と $\mathrm{Coker}(P;C_{Y|X}^{\mathbb{R}}\longrightarrow C_{Y|X}^{\mathbb{R}})$

の構造を考える。一般論により $C^{\mathbb{R}}_{Y|X}$ は $\mathcal{E}_X$-Module であり，又 $\dot{T}^*_Y X$ において P^{-1} が存在することから $\mathrm{Ker}\, P = \mathrm{Coker}\, P = 0$ が直ちに得られるが，この節では §1 の表現式を使って上記の結果を初等的に導く。

(i) 局所可解性

$f \in C^{\mathbb{R}}_{Y|X,p^*}$ が与えられたとき，$Pu = f$ をみたす $u \in C^{\mathbb{R}}_{Y|X,p^*}$ の存在を示す。先ず f の定義函数 φ をとる。$\varphi \in \mathcal{O}(U_r \setminus Z_\delta)$ としてよい。§1 の議論から $P^{-1}\varphi$ は

$$\left\{ z \;\middle|\; |z_1| < r_1,\ |z_\mu| \le r_1 - \varepsilon\ (\mu = 2, \cdots, n),\ \mathrm{Re}\, \xi z_1 < \delta |z_1| \text{ かつ } |z_1 - a| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1} B e} \right\}$$

において正則でかつ $P(P^{-1}\varphi) = \varphi$ をみたす。従って

$$|a| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1} B e}, \quad |a| < \frac{r_1}{2}$$

ととり $\psi = P^{-1}\varphi$ とおき $u = \psi \bmod \mathcal{O}$ と定めれば $Pu = f$ の解 u が作れる。

(ii) 解の正則性

$v \in C^{\mathbb{R}}_{Y|X,p^*}$ が $Pv = 0$ (in $C^{\mathbb{R}}_{Y|X,p^*}$) をみたすならば $v = 0 \in C^{\mathbb{R}}_{Y|X,p^*}$ を示す。

v の定義函数 $\psi \in \mathcal{O}(U_x \setminus Z_\delta)$ をとる。$P\psi = \varphi$ とおくとき $\varphi \in \mathcal{O}(U_x)$ が適当な $x > 0$ に対して成りたつ。

$$P^{-1}\varphi = \psi - \sum (D_1^{-m} P')^j \Psi$$

がなりたつ。但し $\Psi(z) = \psi(a, z') + \cdots + \dfrac{(z_1 - a)^{m-1}}{(m-1)!} \dfrac{\partial^{m-1}\psi}{\partial z_1^{m-1}}(a, z')$ と置いた。従って

$$\psi = P^{-1}\varphi + \sum (D_1^{-m} P')^j \Psi$$

を得るが、

$|a| < \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1} B e}$ ならば右辺は $z = 0$ の近傍で正則な函数を定める。従って ψ 自身 $z = 0$ の近傍で正則となるから $v = \psi \bmod \mathcal{O} = 0$ を得る。以上をまとめて

<u>定理</u>　複素多様体 X の超曲面 Y が線型偏微分作用素 P に関し非特性的とする。このとき

$$\mathrm{Ker}(P : C_{Y|X}^{\mathbb{R}} \longrightarrow C_{Y|X}^{\mathbb{R}}) = \mathrm{Coker}(P : C_{Y|X}^{\mathbb{R}} \longrightarrow C_{Y|X}^{\mathbb{R}}) = 0$$

が成りたつ。

この結果と例えば津野の議論を組み合わせれば次の定理を得る。

<u>定理</u>　P を m 階の偏微分作用素とする。　$p^* \in \dot{T}^*_Y X$ の近傍において　$\sigma_m(P) \not\equiv 0$　がなりたつならば

$$\operatorname{Ker}\left(P : \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X,\,p^*} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X,\,p^*}\right) = 0$$

がなりたつ。

§3. 非同時解の特異性について

前の節で示したように Y が偏微分作用素 P に関して非特性的な点 p^* つまり $\sigma_m(P)(p^*) \neq 0$ をみたす点 p^* においては　$\operatorname{Ker} P = \operatorname{Coker} P = 0$　が成りたつ。又 Y が P の特性多様体の場合、すなわち $\sigma_m(P) \equiv 0$ on $\dot{T}^*_Y X$ をみたすときには、可解性及び特異解の構成について多く研究されている。この節では $\sigma_m(P)(p^*) = 0$ であるが $\sigma_m(P) \not\equiv 0$ on $\dot{T}^*_Y X$　となる場合の非同時解の特異性について考える。

典型的具体例を2つ挙げた後に、予想を述べる。

<u>例</u>　(Leray - Mizohata)

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + i z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) u(z_1, z_2) = \frac{1}{z_2}$$　を考える。

適当な座標変換により

$$\frac{\partial}{\partial z} u(z, w) = \frac{1}{w - z^2}$$

と変形できるので　特殊解として

$$u(z, w) = \frac{1}{2\sqrt{w}} \log\left(\frac{\sqrt{w}+z}{\sqrt{w}-z}\right)$$ を得る。

この解 u は $Y = \{w - z^2 = 0\}$ 以外にも $K = \{w = 0\}$ を特異台に持っている。今 $\Upsilon = \{(0, 0)\}$ と置くと，Y は $Y - \Upsilon$ においては $P = \frac{\partial}{\partial z}$ に関し非特性的であるが，Υ においては特性的である。更に K は Υ から flow $\frac{\partial}{\partial z}$ により生成される特性多様体となるので u の新らたな特異台として K が現われるのは自然である。

例（Lewy）

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + i\frac{\partial}{\partial z_2} - 2i(z_1 + iz_2)\frac{\partial}{\partial z_3}\right) u(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{z_3}$$

は適当な座標変換により次の形に変換できる。

$$\frac{\partial}{\partial z_1} u(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{2z_1z_2 + z_3}$$

特殊解 u として $u = \frac{1}{2z_2}\log(2z_1z_2 + z_3)$ を直ちに得る。

$Y = \{2z_1z_2 + z_3 = 0\}$，$K = \{z_2 = 0\}$，$\Upsilon = \{(z_1, 0, 0) \in \mathbb{C}^3\}$

とおけば Y は $Y - \Upsilon$ においては $P = \frac{\partial}{\partial z_1}$ に関して非特性的であり，Υ においては特性的となっている。この場合には Υ は $\frac{\partial}{\partial z_1}$ に関して不変な集合となっているので K は Υ と $\frac{\partial}{\partial z_1}$ から生成されるわけではない。それにもかかわらず非同時解 u は Y 以外に新らたな特異台として K を持たざるを得ない。

Yに特異台を持つ f を与えたときに $Pu=f$ の非同時解 u に必然的に表われる新らたな特異台 K を決定し、更に K のまわりでの分岐の様子を明らかにしたい。予想を述べる為に言葉を用意する。

$Y=\{z \mid \varphi(z)=0\}$ とおく。Y が $z_0 \in Y$ において P に関し simple characteristic とは

$$\begin{cases} \sigma_m(P)(z_0, \operatorname{grad}\varphi(z_0))=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}\sigma_m(P)(z_0, \operatorname{grad}\varphi(z_0)) \neq 0 \quad \text{for some } j \end{cases}$$

をみたすこととする。以下 simple characteristic を仮定する。

$\sigma_m(P)$ を（T^*X 上消えないような）適当な斉次関数で割って一次斉次化したものを $g(z,\xi)$ とおく。

$$\begin{cases} \dfrac{dz_j}{dt} = \dfrac{\partial g}{\partial \xi_j} \\ \dfrac{d\xi_j}{dt} = -\dfrac{\partial g}{\partial z_j} \end{cases}$$

及び初期条件 $(z(0), \xi(0)) = (w, \operatorname{grad}\varphi(w))$, $w \in Y$ をみたす解を $(z(t,w), \xi(t,w))$ と置く。

$$\tilde{X} = \{(t,w) \mid w \in Y,\ t \text{は充分小}\}$$

と定め $\tilde{X}$ を Y の特性近傍と呼ぶ。又 $\varphi(t,w)=z(t,w)$ で写像 $\varphi : \tilde{X} \to X$ を決め、これを Leray 写像と呼ぶ。

X 上の偏微分方程式 $\mathfrak{P}u=f$ を Leray 写像で持ち上げることにより $\tilde{X}$ 上で対応する偏微分方程式を考えることが出来る。

<u>予想</u> 特性近傍 $\tilde{X}$ で解uを考えたとき、uの新らたな特異台は 写像 φ の退化集合に含まれる。

例えば Leray-Mizohata 方程式 $\frac{\partial}{\partial z_1}u(z_1, z_2) = \frac{1}{z_2 - z_1^2}$ の場合の Leray 写像 $\varphi(t, w) = (z_1, z_2)$ は.

$z_1 = w + t$, $z_2 = w^2$ で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(u \circ \varphi)(t, w) = \frac{1}{w^2 - (w+t)^2}$$

$$= \frac{1}{2w}\left(\frac{1}{t+2w} - \frac{1}{t}\right)$$ と特異台を分解して

$$(u \circ \varphi)(t, w) = \frac{1}{2w}(\log(t+2w) - \log t)$$

と解ける. ここで $w = \sqrt{z_2}$, $t = z_1 - \sqrt{z_2}$ として元の座標で解を表現したものが前に求めた解である。

この様に Leray 写像 φ は特異台を"分解"する 。

文献

1. T. Aoki and S. Tajima. 準備中。上智大学数学講究録 23. リー環と微分方程式 p.34 – p.42, p.43 – p.53 (1986)

2. J. M. Bony et P. Schapira. Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. Invent. Math., 17 (1972) p.95 – p.105

3. ――――――. Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles. Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 26 (1976). p.81 – p.140.

4. L. Gårding, T. Kotake et J. Leray. Problème de Cauchy, I bis et VI. Bull. Soc. Math. Fr. 92 (1964). p.263 – p.361

5. J. Leray. Problème de Cauchy I. Bull. Soc. Math. Fr 85 (1957) p.389 – p.429

6. M. Zerner. Domaine d'holomorphie des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles. C. R. Acad. Sci. Paris. 272 (1971). p.1646 – p.1648